



תיק משימטיקה

תנאים מספיקים - מעגל

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

© כל הזכויות שמורות

תוכן העניינים

3	מטרות התיק
3	זמני עבודה משוערים
3	החומרים והעזרים הדרושים
4	רקע
4	הצעה למהלך העבודה
5	עבודה על משימת ההערכה
5	האם המרובע הוא מלבן?
6	הערכת תוצרי התלמידים
8	פעילות בעקבות ההערכה
10	דף פעילות איזה מרובע?

תנאים מספיקים



מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים לקבוע אם תנאים נתונים מספיקים כדי להסיק מסקנה גיאומטרית מסוימת, ולתת מענה לקשיים שמתגלים. התיק עוסק במרובעים חסומים במעגל.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- לקבוע אם תנאים נתונים הם מספיקים כדי להסיק שמתקבל מרובע מסוג מסוים.
- לנמק באמצעות משפטים מתאימים במקרה שהתנאים מספיקים.
- לנמק באמצעות דוגמאות נגדיות או באמצעות הסבר, במקרה שהתנאים אינם מספיקים.



זמני עבודה משוערים

- עבודה על משימת ההערכה: כ- 25 דקות.
- פעילות בעקבות ההערכה: כ- 60 דקות.



החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימת ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף המשימה **האם המרובע הוא מלבן?**

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- דף פעילות **איזה מרובע?**

- יישומונים:

- [מרובע חסום במעגל ושני אלכסונים שווים](#)
- [מרובע חסום במעגל ושתי זוויות סמוכות ישרות](#)
- [מרובע חסום במעגל ושתי זוויות נגדיות ישרות](#)
- [מרובע חסום במעגל ואלכסוניו חוצים זה את זה](#)



רקע

פתרון בעיות הוכחה בגיאומטריה כרוך בהסקת מסקנות מתנאים נתונים. למשל, בהינתן מרובע שאורכי צלעותיו הנגדיות שווים, ניתן להסיק שהמרובע הוא מקבילית. קושי נפוץ שיש לתלמידים בהקשר זה הוא הסקת מסקנות שהתנאים הנתונים אינם מספיקים כדי להסיק. למשל, בהינתן מרובע שאלכסונו שווים, תלמידים נוטים להסיק שהמרובע הוא מלבן. קושי זה אופייני במיוחד לנושא המרובעים. אחד הגורמים לכך הוא חוסר הבחנה בין תכונות של מרובעים שונים לבין **התנאים המספיקים** לקבלת מרובע מסוג מסוים. למשל, במלבן האלכסונים שווים זה לזה, אולם לא כל מרובע בעל אלכסונים שווים הוא מלבן. כך לדוגמה, גם בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה. כלומר, התנאי של שוויון האלכסונים במרובע **אינו מספיק** כדי להסיק שהמרובע הוא מלבן (עניין זה קשור גם לקושי בהבחנה בין משפט לבין המשפט ההפוך לו). גורם נוסף להסקת מסקנות שהתנאים הנתונים אינם מספיקים כדי להסיק, הוא שרטוט סקיצה של נתוני הבעיה כך שבשרטוט נראות תכונות שאינן נתונות. דבר זה עלול לגרום להסקת מסקנות שאינן נובעות מהנתונים.

התיק **תנאים מספיקים** עוסק במרובעים חסומים במעגל. התיק נועד לסייע למורה לזהות תלמידים שיש להם קשיים בהסקת מסקנות מתנאים נתונים ולתת להם מענה.



הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימת הערכה **האם המרובע הוא מלבן?**
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילות בעקבות ההערכה.



עבודה על משימת ההערכה

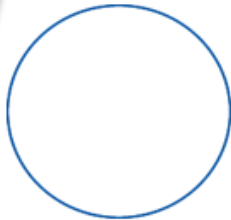
במשימה האם המרובע הוא מלבן? נתון מרובע החסום במעגל. בכל סעיף מוצג נתון אחר המתקיים במרובע זה, ועל התלמידים לקבוע אם הנתונים שלפניהם מספיקים כדי להסיק שהמרובע הנתון הוא מלבן. אם התנאים מספיקים לקבלת מלבן – יש להוכיח זאת. אם התנאים אינם מספיקים – יש להסביר מדוע או לתת דוגמה נגדית, כלומר, דוגמה למרובע המקיים את התנאים הנתונים אך אינו מלבן.
המשימה מיועדת לעבודה עצמית של תלמידים.

האם המרובע הוא מלבן?

1. מרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע הם AC ו-BD.
נתון: $AC = BD$

האם המרובע ABCD הוא מלבן?

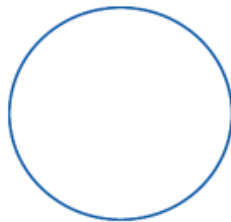
אם כן – הוכיחו. אם לא – הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.



2. מרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע הם AC ו-BD.
נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$

האם המרובע ABCD הוא מלבן?

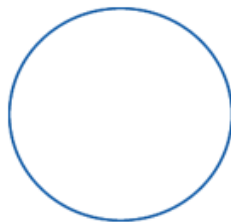
אם כן – הוכיחו. אם לא – הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.



3. מרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע הם AC ו-BD.
נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90^\circ$

האם המרובע ABCD הוא מלבן?

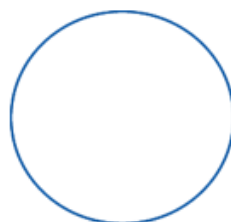
אם כן – הוכיחו. אם לא – הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.



4. מרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע הם AC ו-BD.
נתון: האלכסונים חוצים זה את זה.

האם המרובע ABCD הוא מלבן?

אם כן – הוכיחו. אם לא – הסבירו או הביאו דוגמה נגדית.





הערכת תוצרי התלמידים

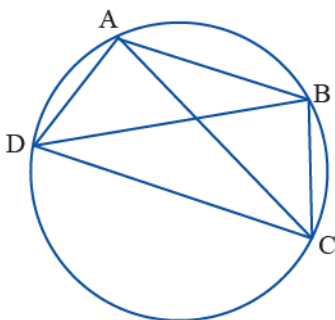
לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה שלהלן.

סעיף 4		סעיף 3		סעיף 2		סעיף 1		שם התלמיד/ה
שגיאה המרובע אינו בהכרח מלבן	תשובה נכונה המרובע הוא מלבן	שגיאה המרובע הוא מלבן	תשובה נכונה המרובע אינו בהכרח מלבן	שגיאה המרובע אינו בהכרח מלבן	תשובה נכונה המרובע הוא מלבן	שגיאה המרובע הוא מלבן	תשובה נכונה המרובע אינו בהכרח מלבן	
V			V		V		V	תלמיד 1
V					V	V		תלמיד 2
	V	V			V	V		תלמיד 3
								סך-הכל

הטורים הצבועים בטבלת ההערכה מצביעים על תלמידים שלא זיהו אם הנתונים מספיקים כדי להסיק שהמרובע הוא מלבן.

ניתן לציין בתוך הטבלה גם את איכות ההוכחה של כל תלמיד בהתאם לשיקול דעת המורה.

לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימה שלהלן:

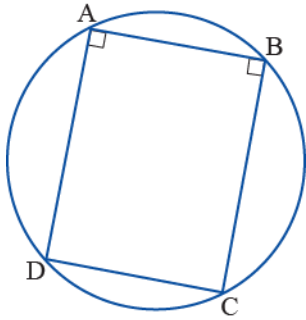


1. אין נתונים מספיקים כדי להסיק שהמרובע הוא מלבן. המרובע יכול להיות גם טרפז שווה-שוקיים, כי טרפז כזה יכול להיות חסום במעגל (סכום כל שתי זוויות נגדיות שלו 180°), ואלכסוניו שווים באורכם.

2. המרובע הוא מלבן.

נתון כי הזוויות A ו-B הן זוויות ישרות.

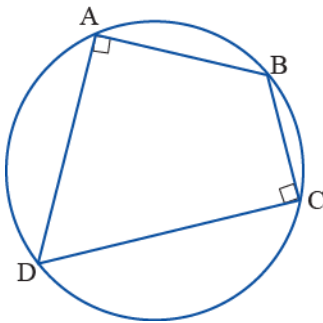
מאחר שהמרובע חסום במעגל, הזווית C משלימה את הזוויות A ל- 180° , ולכן גם היא זווית ישרה. מרובע בעל שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.



3. אין נתונים מספיקים כדי להסיק שהמרובע הוא מלבן. המרובע יכול להיות כל

מרובע שיש בו זוג זוויות נגדיות ישרות (ראו ציור).

למשל, דלתון בעל שתי זוויות נגדיות ישרות.



4. המרובע הוא מלבן.

נתון שהאלכסונים חוצים זה את זה. לכן המרובע הוא מקבילית. במקבילית כל זוג של זוויות נגדיות שוות זו לזו. מאחר שהמרובע חסום במעגל, הסכום של כל זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180° . לכן כל הזוויות במרובע זה ישרות, והמרובע הוא מלבן.



פעילות בעקבות ההערכה

הפעילות מיועדת לתלמידים שגילו קושי בזיהוי התנאים המספיקים כדי להסיק שמרובע הוא מלבן (מסומנים בעמודות המודגשות בטבלת הערכה).

שלבי הפעילות

- בדיקת הפתרונות בעזרת יישומונים.
- דיון.
- עבודה על דף פעילות **איזה מרובע?**

מהלך הפעילות

- **בדיקת הפתרונות בעזרת יישומונים**

התלמידים בודקים באופן עצמאי את תשובותיהם למשימה **האם המרובע הוא מלבן?** בעזרת היישומונים הבאים:

לסעיף 1 – [מרובע חסום במעגל ושני אלכסונים שווים](#)

לסעיף 2 – [מרובע חסום במעגל ושתי זוויות סמוכות ישרות](#)

לסעיף 3 – [מרובע חסום במעגל ושתי זוויות נגדיות ישרות](#)

לסעיף 4 – [מרובע חסום במעגל ואלכסונו חוצים זה את זה](#)

בסעיפים 1 ו-3, שבהם הנתונים אינם מספיקים לקבלת מלבן, היישומונים מספקים דוגמאות נגדיות רבות הממחישות זאת.

בסעיפים 2 ו-4, שבהם הנתונים מספיקים לקבלת מלבן, גרירת הקודקודים ביישומן מראה שהמרובע נשאר תמיד מלבן.

• דיון

שאלות לדיון

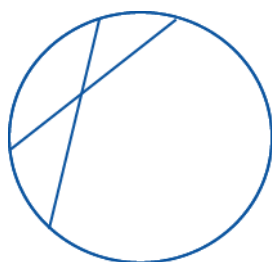
- בסעיפים 1 ו-3: מדוע הנתונים אינם מספיקים כדי לקבוע שהמרובע הוא מלבן? הראו דוגמה נגדית (כלומר, דוגמה למרובע שמקיים את תנאי השאלה אך הוא אינו מלבן).
- בסעיפים 2 ו-4: כיצד ניתן להוכיח על פי הנתונים שהמרובע הוא מלבן?
- מאין נובעות שגיאות בזיהוי התנאים המספיקים?
כדאי לשים דגש על ההיבטים הבאים:

1. חוסר הבחנה בין התכונות של מצולע מסוים לבין התנאים המספיקים לקבלתו

למשל, ידוע כי האלכסונים בריבוע שווים ומאונכים זה לזה. לכן כשנתונות שתי התכונות הללו תלמידים נוטים להסיק שהמרובע הוא ריבוע, למרות שקיימים מרובעים שונים המקיימים את שתי התכונות הללו (מספיק לקחת שני קיסמים שווים באורכם ולהזיזם כשהם מאונכים זה לזה כדי להשתכנע שהמרובע שהקיסמים אלכסוניו אינו בהכרח ריבוע).

2. שרטוט סקיצה באופן מטעה כך שנראות בה תכונות שאינן נתונות

ישנם תלמידים שמנסים לשרטט מרובע בהתאם לנתונים. דרך זו רצויה, אלא שיש לוודא שהשרטוט אינו משקף תכונות שאינן נובעות מן הנתונים.



למשל, שרטוט המתאים לסעיף 1 יראה את שני האלכסונים שווים זה לזה. אם האלכסונים ישורטטו כך שהם ייראו כאילו הם גם חוצים זה את זה – המרובע יראה כמלבן. לעומת זאת, אם מקפידים לשרטט את האלכסונים כך שיחתכו זה את זה אך לא יחצו זה את זה, יתקבל מרובע שלא נראה כמלבן. כדאי להוסיף שהשרטוט אינו מהווה הוכחה, ותפקידו לנתב את כיוון החשיבה ואת ההוכחה למקום הרצוי.

- אילו שאלות כדאי לשאול כאשר רוצים לקבוע אם הנתונים מספיקים כדי להסיק שמתקבל מרובע מסוג מסוים? שאלות לדוגמה: באיזו תכונה השתמשנו כדי להוכיח שמתקבל מרובע מסוג מסוים? האם תכונה זו קובעת באופן יחיד את המרובע המבוקש? האם קיימים מרובעים נוספים עם תכונה זו? האם הסקיצה ששרטטתי משקפת תכונות שאינן נובעות מן הנתונים?

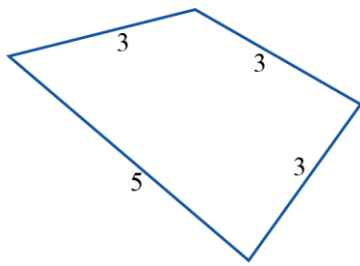
• עבודה על דף הפעילות איזה מרובע?

דף זה נועד ליישום ולתרגול העקרונות שנלמדו. מומלץ להעביר אותו במועד אחר ולא ברצף של המערך הנ"ל. הפעילות מתאימה לעבודה עצמית או בזוגות. הבעיה הראשונה בדף הפעילות דומה למשימה **האם המרובע הוא מלבן?** אך הפעם מדובר לא רק בנתונים המספיקים לקבלת מלבן, אלא גם בנתונים המספיקים לקבלת מרובעים מסוגים שונים. בבעיה השנייה התלמידים מתבקשים להסיק בעצמם איזה מרובע מתקבל על סמך הנתונים, ולהוכיח את מסקנתם. גם כאן שרטוט על פי הנתונים של סקיצה שאינה כוללת תכונות שאינן נובעות מן הנתונים, יכול לעזור בקביעת סוג המרובע.

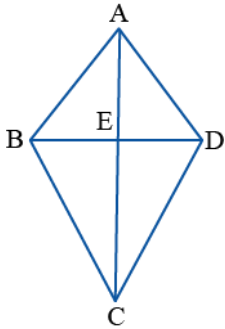
איזה מרובע?

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים כתובה טענה (תנאי + מסקנה).
קבעו בכל סעיף אם הנתונים מספיקים כדי להסיק את המסקנה.
אם הנתונים מספיקים – הוכיחו.
אם הנתונים אינם מספיקים – הסבירו מדוע או הביאו דוגמה למרובע אחר שיכול להתקבל על פי הנתונים.
 - א. מרובע ששלוש מצלעותיו שוות זו לזו הוא מעוין.
 - ב. מרובע שאלכסונו מאונכים, ויש בו שתי צלעות סמוכות שוות באורכן, הוא דלתון.
 - ג. מרובע שאלכסונו מאונכים זה לזה ושניים באורכם, הוא ריבוע.
2. קבעו איזה סוג מרובע **חייב** להתקבל על-סמך הנתונים והוכיחו.
 - א. מעוין החסום במעגל.
 - ב. מרובע החסום במעגל, ויש לו זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות.
 - ג. מרובע החסום במעגל, שאחד מאלכסונו חוצה את הזוויות.

הצעה לפתרון דף הפעילות איזה מרובע?



1. א. מרובע ששלוש מצלעותיו שוות זו לזו אינו בהכרח מעוין, ואפשר להביא דוגמאות נגדיות. למשל, במרובע שבשרטוט משמאל יש 3 צלעות שוות באורכן, והצלע הרביעית שונה מהן באורכה. לכן המרובע אינו מעוין, כי במעוין כל הצלעות שוות באורכן.
אפשר גם לציין במילים, ללא שרטוט, דוגמה נגדית מתאימה, כמו טרפז שווה-שוקיים שאורך אחד מבסיסיו כאורך השוק.

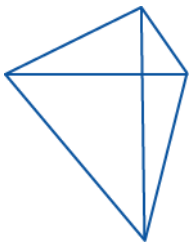


ב. הטענה נכונה. מרובע שאלכסוניו מאונכים ויש בו שתי צלעות סמוכות השוות באורכן, חייב להיות דלתון.

$$\text{נתון: } AD = AB \text{ ו- } AC \perp BD$$

AE הוא גובה במשולש שווה-שוקיים $\triangle ABD$, ולכן הוא גם תיכון. כלומר, $BE = ED$.

EC הוא תיכון וגובה במשולש BCD, ולכן $\triangle BCD$ הוא משולש שווה-שוקיים. כלומר, $CB = CD$. לכן המרובע הוא דלתון.

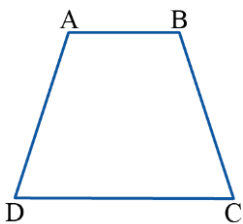


ג. מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה ושווים באורכם אינו בהכרח ריבוע.

כדוגמה נגדית אפשר להשתמש בשני קיסמים השווים באורכם המדגימים את אלכסוני המרובע, להניחם במאונך, כך שאף אחד מהם לא יחצה את השני כבשרטוט, ולחבר את קצות הקטעים למרובע. מתקבל מרובע שאינו ריבוע.

כדי שמרובע שאלכסוניו מאונכים ושווים באורכם יהיה ריבוע, האלכסונים צריכים גם לחצות זה את זה.

2. א. מעוין החסום במעגל הוא ריבוע. במעוין הזוויות הנגדיות שוות זו לזו. המעוין חסום במעגל, לכן סכום הזוויות הנגדיות שווה ל- 180° , ולכן כל זווית שווה ל- 90° . מעוין שזוויותיו ישרות הוא ריבוע.

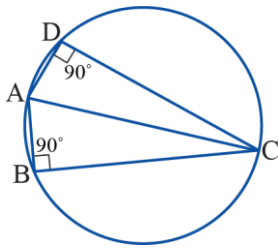


ב. המרובע הוא טרפז שווה-שוקיים. מרובע שיש לו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות הוא טרפז. מאחר שהוא חסום במעגל

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ \text{ אבל בגלל ההקבלה}$$

$$\angle D = \angle C \Leftarrow \text{ הטרפז הוא שווה-שוקיים.}$$



ג. המרובע הוא דלתון (עם זוג זוויות נגדיות ישרות).
 האלכסון חוצה את הזוויות A ו-C, לכן $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ לפי ז.צ.ז.
 $\Leftarrow AD = AB$ ו- $DC = BC$ \Leftarrow המרובע הוא דלתון.
 הדלתון חסום במעגל, ולכן סכום הזוויות B ו-D שווה ל- 180° ,
 והזוויות האלה שוות בגודלן, לכן הן זוויות ישרות.
 אפשר גם להוכיח ללא שימוש בחפיפה, באמצעות מיתרים המתאימים לזוויות
 היקפיות שוות.