תיק משימטיקה

משפטים הפוכים: מעגל

להנגשה פרטנית נא לפנות: st.negishut@weizmann.ac.il

תוכן עניינים

פתיחה[1]

מטרות התיק

לסייע למורה להעריך את יכולת התלמידים להשתמש במהלך פתרון בעיות בגיאומטריה במשפט מתאים כנימוק לטענה, ולא בטענה ההפוכה לו, ולתת מענה לקשיים המתגלים. התיק עוסק בנושא: מעגל.

ההערכה והמענה לקשיים מתמקדים ביכולת התלמידים:

- ❖ לזהות מה נתון ומה צריך להוכיח, במשפט מתמטי המנוסח במילים.
- ❖ לנמק טענה בגיאומטריה באמצעות משפט מתאים ולא באמצעות הטענה ההפוכה למשפט.

זמני עבודה משוערים

- ❖ עבודה על משימות הערכה: 40-30 דקות.
- ❖ פעילויות בעקבות ההערכה: כ- 30 דקות.

החומרים והעזרים הדרושים

לצורך עבודה על משימות הערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף משימה 1: ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
- ❖ דף משימה 2: ***מוסיפים נימוקים.***
- ❖ דף משימה 3: ***בודקים נימוקים.***

לצורך הפעילות בעקבות ההערכה (לכל תלמיד/ה):

- ❖ דף פעילות 1: ***משפטים הפוכים.***
- ❖ דף פעילות 2: ***מהו הנימוק הנכון?***

---

[1] ארבעה תיקי משימטיקה עוסקים במשפטים הפוכים. התיקים מתמקדים בארבעה נושאים מרכזיים מתכנית הלימודים בגיאומטריה: ***משולשים***, ***מרובעים***, ***מעגל***, ו***פרופורציה ודמיון***. בנוסף, תיק חמישי – ***זיהוי נתונים ומסקנות*** – מתמקד בהיבט בסיסי הכרוך בעיסוק במשפטים הפוכים.

רקע

בלימודי הגיאומטריה עוסקים רבות בבעיות הוכחה. לעיתים במהלך הוכחה תלמידים מנמקים טענות בצורה שגויה, באמצעות הטענה ההפוכה למשפט המתאים. למעשה, במקרים רבים התלמידים אינם מבחינים בין השניים. למשל, כנימוק להיסק שזוג ישרים הם מקבילים, תלמידים רושמים לעיתים כנימוק: "זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות בגודלן" במקום "אם שתי זוויות מתחלפות שוות בגודלן אז הישרים מקבילים". בהחלפה בין המשפט המתאים ובין הטענה ההפוכה לו מתרחש כשל לוגי, שכן מסתמכים על המסקנה שאותה רוצים להוכיח. אחד הגורמים לחוסר ההבחנה של תלמידים בין שתי טענות הפוכות זו לזו הוא שהתלמידים אינם מזהים את הנתון ואת מה שצריך להוכיח בטענה מסוימת. זיהוי זה הוא תנאי מוקדם להבחנה בין שתי טענות הפוכות זו לזו.

נושא המעגל הוא נושא מרכזי בתוכנית הלימודים בגיאומטריה. התיק ***משפטים הפוכים: מעגל*** מסייע למורה לזהות תלמידים הנוטים להחליף בין משפט ובין הטענה ההפוכה לו, ולתת מענה לקושי זה.

הצעה למהלך העבודה

- עבודה על משימות הערכה:
  - משימה 1: ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
  - משימה 2: ***מוסיפים נימוקים.***
  - משימה 3: ***בודקים נימוקים.***
- הערכת תוצרי התלמידים.
- פעילויות דיפרנציאליות בעקבות ההערכה.

עבודה על משימות הערכה

בתיק זה שלוש משימות הערכה:

- משימה 1: ***מה נתון ומה יש להוכיח?***
- משימה 2: ***מוסיפים נימוקים.***
- משימה 3: ***בודקים נימוקים.***

מטרת המשימה הראשונה היא לבדוק אם התלמידים מזהים במשפט מתמטי מה נתון ומה צריך להוכיח. התלמידים נדרשים לכתוב זאת במילים או בכתיב מתמטי.

בשתי המשימות הנוספות (משימות 2 ו-3) נתונות הוכחות קצרות לבעיות העוסקות במעגל. התלמידים נדרשים לנמק את שלבי ההוכחה או לבדוק את הנימוקים.

משימה 1: מה נתון ומה יש להוכיח?

משימה 1: מה נתון ומה יש להוכיח?

רִשמו במילים **או** בכתיב מתמטי מה **נתון** ומה **צריך להוכיח**, עבור כל אחד מהמשפטים הבאים:

דוגמה: בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים באורכם.

במילים

נתון: טרפז שווה שוקיים

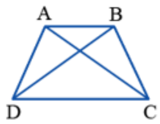
צריך להוכיח: אלכסוני הטרפז שווים באורכם

בכתיב מתמטי

נתון: $ABCD$ טרפז $(AB \parallel DC)$

$AD = BC$

צריך להוכיח: $AC = BD$



א. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

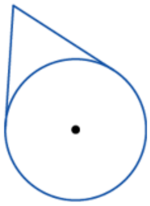
נתון: ____________________

צריך להוכיח: ____________________

ב. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה, שווים באורכם.

נתון: ____________________

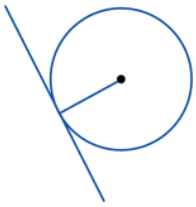
צריך להוכיח: ____________________



ג. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

נתון: ____________________

צריך להוכיח: ____________________



ד. במעגל, זווית היקפית שווה בגודלה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

נתון: ____________________

צריך להוכיח: ____________________

למשימה 1 מונגשת

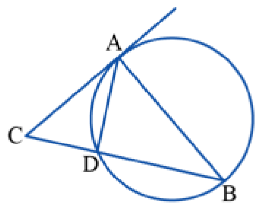
משימה 2: מוסיפים נימוקים

משימה 2: מוסיפים נימוקים

תלמידי כיתה י' בבית ספר "אבני-חן" עבדו על בעיות הוכחה בגיאומטריה.

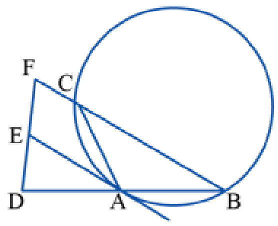
יעל ועמרי כָּתבו הוכחות לבעיות בלי נימוקים. עליכם להשלים את הנימוקים לטענות שלהם.

א. A ו-B הן שתי נקודות על המעגל. מנקודה B מעבירים חותך למעגל, החותך את המעגל גם בנקודה D. מנקודה A מעבירים משיק למעגל.
המשיק והחותך נפגשים בנקודה C מחוץ למעגל.
AD הוא גובה במשולש ABC.
צריך להוכיח: משולש ABC הוא ישר זווית
לפניכם ההוכחה של **יעל**. הַשלימו את הנימוקים החסרים.



טענה	נימוק
1. $\measuredangle ADB = 90°$	
2. AB קוטר במעגל	
3. $\measuredangle CAB = 90°$	

ב. ΔABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) חסום במעגל.
F נקודה על המשך הצלע BC.
D נקודה על המשך הצלע AB כך ש: $DA = AC$.
E נקודה על הקטע FD כך ש- EA משיק למעגל.
צריך להוכיח: AE הוא קטע אמצעים במשולש BDF
לפניכם ההוכחה של **עמרי**. הַשלימו את הנימוקים החסרים.

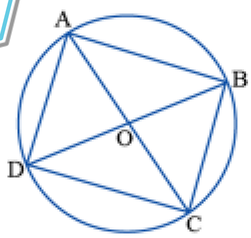


טענה	נימוק
1. $AB = AC$	
2. $\measuredangle ACB = \measuredangle B$	
3. $\measuredangle EAC = \measuredangle B$	
4. $\measuredangle EAC = \measuredangle ACB$	
5. $EA \parallel FB$	
6. EA קטע אמצעים במשולש	

למשימה 2 מונגשת

משימה 3: בודקים נימוקים

משימה 3: בודקים נימוקים



א. נתון: מרובע $ABCD$ חסום במעגל שמרכזו O

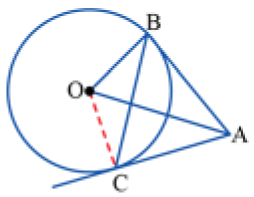
אלכסוני המרובע AC ו- BD עוברים דרך הנקודה O

צריך להוכיח: $ABCD$ מלבן

שי הוכיח הוכחה נכונה אך שגה **בשני** נימוקים.

סמנו √ ליד הנימוק נכון. תקנו את הנימוקים השגויים.

טענה	נימוק
1. AC ו- BD קטרים במעגל	כי הם עוברים דרך מרכז המעגל O
2. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$	זווית היקפית של $90°$ נשענת על קוטר
3. $ABCD$ מלבן	במלבן כל הזוויות ישרות



ב. נתון: מעגל שמרכזו O

B נקודה על המעגל ו-A נקודה מחוץ למעגל

המשולש ABO הוא ישר זווית ($\sphericalangle OBA = 90°$)

מנקודה A מעבירים משיק למעגל שנוגע במעגל בנקודה C

צריך להוכיח: OA הוא חוצה $\sphericalangle BAC$

דנה הוסיפה קו עזר OC , וכתבה הוכחה נכונה. היא שגתה **בשני** נימוקים.

סמנו √ ליד כל נימוק נכון. תקנו את הנימוקים השגויים.

טענה	נימוק
1. $\sphericalangle OBA = 90°$	נתון
2. AB משיק למעגל	משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה
3. AC משיק למעגל	נתון
4. $\sphericalangle OC \perp AC$	משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה
5. $OB = OC$	רדיוסים שווים במעגל
6. AO חוצה את $\sphericalangle BAC$	כל נקודה על חוצה הזווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית

למשימה 3 מונגשת

הערכת תוצרי תלמידים

לצורך הערכת תוצרי התלמידים ומיון התשובות שלהם ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

שם התלמיד/ה	כל התשובות נכונות	טעו בזיהוי הנתונים והמסקנות	נימקו באמצעות משפט הפוך למשפט המתאים, או באמצעות חלק של משפט	הערות
תלמיד 1	√			
תלמיד 2		√	√	
תלמיד 3			√	במשימה 1 ד הניסוי לא מדויק
סך-הכול				

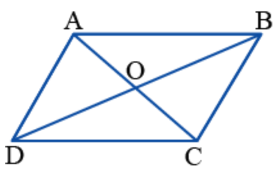
לבדיקת תוצרי התלמידים ניתן להיעזר בפתרון המשימות שלהלן:

פתרון משימה 1: ***מה נתון ומה יש להוכיח?***

א. נתון: מרובע ABCD, O מפגש האלכסונים

AO = OC   BO = OD

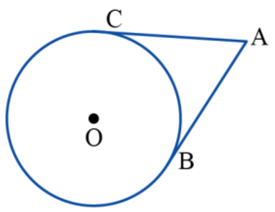
צריך להוכיח: המרובע ABCD הוא מקבילית



ב. נתון: AC ו- AB הם שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A מחוץ למעגל

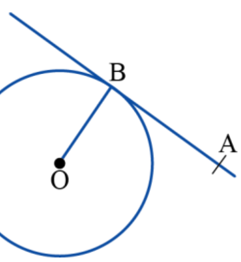
נקודות ההשקה הן B ו-C

צריך להוכיח: AB = AC



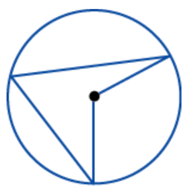
ג. נתון: מעגל שמרכזו O, OB רדיוס ו- AB משיק למעגל בנקודה B.

צריך להוכיח: OB ⊥ AB



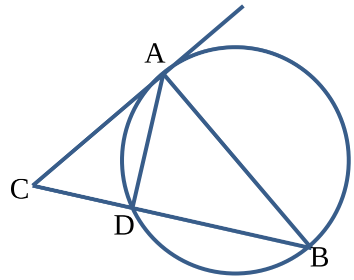
ד. נתון: זווית היקפית וזווית מרכזית במעגל הנשענות על אותה קשת.

צריך להוכיח: הזווית ההיקפית שווה למחצית הזווית המרכזית.



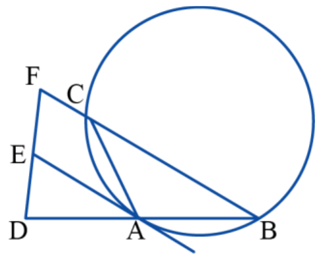
פתרון משימה 2: *מוסיפים נימוקים*

א. הוכחה:



נימוק	טענה
נתון ש- AD גובה במשולש ABC	1. $\sphericalangle ADB = 90^\circ$
זווית היקפית של 90^0 נשענת על קוטר	2. AD קוטר במעגל
המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה	3. $\sphericalangle CAB = 90^\circ$

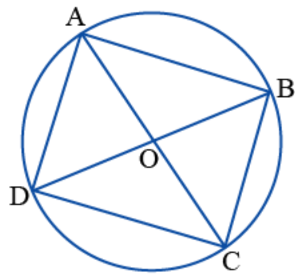
ב. הוכחה:



נימוק	טענה
נתון	1. $AB = AC$
זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים שוות בגודלן	2. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle B$
זווית בין משיק למיתר שווה בגודלה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצדו השני	3. $\sphericalangle EAC = \sphericalangle B$
	4. $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ACB$
נתון	5. $EA \parallel FB$
ישר החוצה צלע אחת במשולש, ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית	6. EA קטע אמצעים במשולש

פתרון משימה 3: *בודקים נימוקים*

א. ההוכחה של **שי**

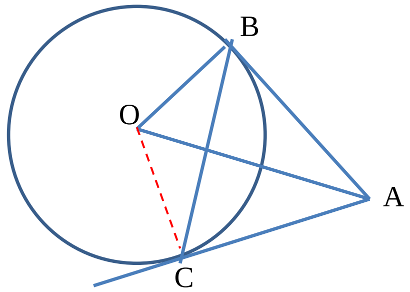


טענה	נימוק	נכון/שגוי
1. AC ו- BD קטרים במעגל	כי הם עוברים דרך מרכז המעגל O	√
2. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$	זווית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר	X
3. $ABCD$ מלבן	במלבן כל הזוויות ישרות	X

תיקון לנימוק 2: זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה.

תיקון לנימוק 3: מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן או לפי הגדרת המלבן.

ב. ההוכחה של **דנה**



טענה	נימוק	נכון/שגוי
1. $\sphericalangle OBA = 90°$	נתון	√
2. AB משיק למעגל	משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה	X
3. AC משיק למעגל	נתון	√
4. $OC \perp AC$	משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה	√
5. $OB = OC$	רדיוסים במעגל שווים באורכם	√
6. AO חוצה את $\sphericalangle BAC$	כל נקודה על חוצה הזווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית	X

תיקון לנימוק 2: ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל

תיקון לנימוק 6: אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית אז היא נמצאת על חוצה הזווית.

פעילות בעקבות ההערכה

מוצעות שתי פעילויות דיפרנציאליות שמטרתן לסייע למורה לתת מענה לקשיים שונים שהתגלו בניתוח תוצרי התלמידים.

למי מיועדת הפעילות?	פעילות 1	פעילות 2
לתלמידים שלא זיהו נתון ומסקנה במשפט גיאומטרי	V	
לתלמידים שנימקו באמצעות טענה הפוכה למשפט המתאים, או באמצעות חלק של משפט		V

פעילות 1: משפטים הפוכים

שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 1: ***משפטים הפוכים.***
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 1: משפטים הפוכים

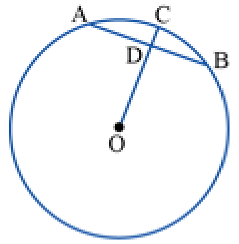
דף פעילות 1: ***משפטים הפוכים***

א. לפניכם רשומים שני משפטים הפוכים זה לזה:

משפט 1: קטע ממרכז המעגל החוצה מיתר מאונך למיתר

משפט 2: האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר

נסחו כל משפט **בשלושה** אופנים שונים: באמצעות "אם – אז",
נתון ומסקנה: במילים, ובכתיב מתמטי, והשלימו את הטבלה:



המשפטים	"אם – אז"	במילים: מה נתון ומהי המסקנה	בכתיב מתמטי
משפט 1	אם ______________ אז ______________	נתון: ____________ מסקנה: ____________	נתון: ____________ צריך להוכיח: ________ ______________
משפט 2	אם ______________ אז ______________	נתון: ____________ מסקנה: ____________	נתון: ____________ צריך להוכיח: ________ ______________

ב. בכל סעיף מנוסח משפט ושתי טענות. סמנו איזו מבין הטענות היא הטענה ההפוכה למשפט.

1. **המשפט**: המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

   טענות:

   - הרדיוס מאונך למשיק למעגל בנקודת ההשקה.
   - ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

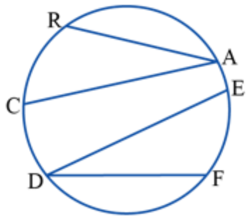
2. **המשפט**: קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

   טענות:

   - חוצה זווית של שני משיקים היוצאים מנקודה אחת למעגל עובר דרך מרכז המעגל.
   - קטע המחבר את הנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למרכז המעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

ג. בכל סעיף מנוסחת טענה בכתיב מתמטי.

נסחו במילים: את המשפט המתאים לטענה ואת הטענה ההפוכה.

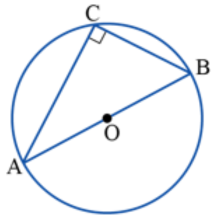


1. **נתון:** מעגל שבו $\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{RC}$. הנקודות A ו-D נמצאות על המעגל.

מסקנה: $\sphericalangle RAC=\sphericalangle FDE$

המשפט המתאים:___________________________________

הטענה ההפוכה:___________________________________



2. **נתון:** מעגל O וחסום בו משולש ABC . $\sphericalangle C=90^\circ$

מסקנה: הנקודה O נמצאת על הצלע AB .

המשפט המתאים:___________________________________

הטענה ההפוכה:___________________________________

ד. בכל סעיף רשומות שתי טענות: טענה נכונה וטענה הפוכה לה. הַראו בעזרת דוגמה נגדית שהטענה ההפוכה אינה נכונה.

1. **הטענה:** אם מצולע הוא מלבן אז ניתן לחסום אותו במעגל

הטענה ההפוכה: אם ניתן לחסום מצולע במעגל אז הוא מלבן

דוגמה נגדית

2. **הטענה:** נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו.

הטענה ההפוכה: אם נקודה נמצאת על קטע המרכזים של שני מעגלים משיקים אז היא נקודת ההשקה.

דוגמה נגדית

לפעילות 1 מונגשת

דיון

- ניסוח משפט באמצעות המילים "אם" ו"אז" מארגן את המשפט באופן שמאפשר לזהות את ה**נתון** וה**מסקנה** של המשפט, וכך עשוי לסייע גם בניסוח הטענה ההפוכה.
- חשוב לבדוק את נכונות הטענות ההפוכות. אפשר להסתמך עליהן כנימוק רק אם הן נכונות. אפשר לתת דוגמאות נוספות למשפטים שהטענות ההפוכות להם אינן נכונות. (דוגמאות: זוויות קודקודיות שוות בגודלן, שני משולשים חופפים הם בעלי שטחים שווים וכו'). דוגמאות כאלה עשויות לחדד את ההבדל בין טענה וטענה הפוכה לה ולהבהיר מדוע חשוב לנמק באמצעות המשפט המתאים ולא באמצעות הטענה ההפוכה לו.

פעילות 2: מהו הנימוק הנכון?

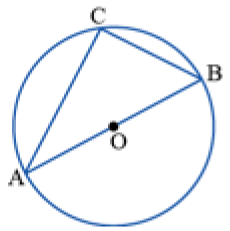
שלבי הפעילות

1. עבודה על דף פעילות 2: ***מהו הנימוק הנכון?***
2. דיון.

עבודה על דף פעילות 2: *מהו הנימוק הנכון?*

דף פעילות 2: *מהו הנימוק הנכון?*

א. תלמידים עסקו בהוכחות בגיאומטריה וחיפשו נימוקים לטענותיהם.

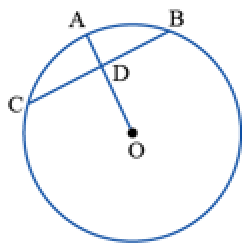


1. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודה O נמצאת על הצלע AB.

מיכאל טען: מהנתונים האלה נובע ש- $\sphericalangle C$ שווה ל- $90°$.

באיזה מהמשפטים הבאים הוא צריך לבחור כנימוק לטענתו?

- במעגל זווית היקפית של $90°$ נשענת על קוטר.
- זווית היקפית הנשענת על קוטר במעגל היא זווית ישרה.



2. במעגל שמרכזו O, הרדיוס OA חותך את המיתר CB בנקודה D, כך ש- $BD = CD$.

יוסי טען: מהנתונים האלה נובע ש- $\sphericalangle ADC$ שווה ל- $90°$.

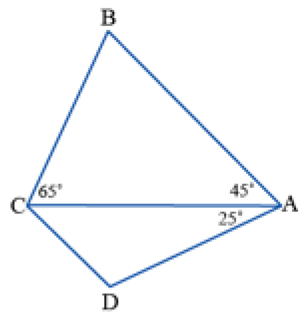
באיזה מהמשפטים הבאים הוא צריך לבחור כנימוק לטענתו?

- האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר.
- קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.

ב. **נתון:** במרובע $ABCD$ $AB \parallel DC$

קבעו לפי נתון זה ולפי הנתונים הרשומים על השרטוט, אם ניתן לחסום את המרובע $ABCD$ במעגל.

☐ כן ☐ לא ☐ אי אפשר לדעת



סמנו נימוק מתאים לקביעתכם.

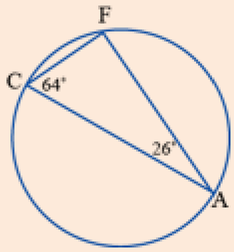
☐ אם ניתן לחסום מרובע במעגל, אז הסכום של כל זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180°$.

☐ אם הסכום של זוג זוויות נגדיות במרובע שווה ל- $180°$, אז ניתן לחסום אותו במעגל.

☐ אין מספיק נתונים כדי לקבוע.

ג. **דנה** פתרה את הבעיות הבאות. הנימוקים של דנה מסתמכים על חלקי משפטים. השלימו את הנימוקים.

1. קבעו לפי הנתונים הרשומים על השרטוט אם אחת מצלעות המשולש היא קוטר במעגל, ונמקו.



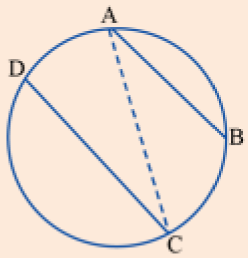
☐ כן ☐ לא ☐ אי אפשר לדעת

נימוק: ______________________________

דנה סימנה ☒ כן

נימוק: $\sphericalangle F$ היא זווית היקפית הנשענת על קוטר

2. קבעו אם הקשתות בין מיתרים מקבילים במעגל שוות, ונמקו.



☐ כן ☐ לא ☐ אי אפשר לדעת

נימוק: ______________________________

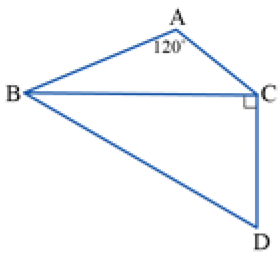
דנה סימנה ☒ כן

נימוק: זוויות A ו-C הן זוויות מתחלפות והן היקפיות שוות

ד. **נתון:** משולש ABC שבו $\sphericalangle A = 120^0$

ΔBCD ישר זווית ($\sphericalangle BCD = 90°$)

$CD = \frac{1}{2}BD$



צריך להוכיח: ניתן לחסום במעגל את המרובע ABCD

גליה הוכיחה הוכחה נכונה אך שגתה **בשני** נימוקים.

סמנו √ ליד הנימוק נכון. תקנו את הנימוקים השגויים.

טענה	נימוק
1. $\sphericalangle BCD = 90°$	נתון
2. $CD = \frac{1}{2}BD$	נתון
3. $\sphericalangle CBD = 30°$	אם במשולש ישר זווית יש זווית של 30^0, אז הניצב שמולה שווה לחצי היתר
4. $\sphericalangle D = 60°$	חישוב זוויות במשולש
5. $\sphericalangle A = 120°$	נתון
6. $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$	חישוב
7. ניתן לחסום במעגל את מרובע ABCD	במרובע החסום במעגל סכום הזוויות הנגדיות שווה ל-180^0

לפעילות 2 מונגשת

דיון

- אפשרויות שונות לכתיבת נימוקים באופן שמבהיר שמתכוונים למשפט המתאים ולא לטענה ההפוכה לו.
  - ניסוח מלא של המשפט
  - שמו של המשפט (אם יש לו שם) כמו: ***משפט פיתגורס***
  - שימוש בביטוי המדגיש את הסיבתיות. דוגמה: המרובע הוא מלבן **כי**...
- הסתמכות על טענה שרוצים להוכיח היא כשל לוגי. לדוגמה, לא ניתן להסיק שזווית היא בת 30^{o} על סמך נימוק המתחיל במילים: אם במשולש ישר זווית יש זווית של 30^{o}.